

Física 3

(Problemas - Parte 1)

Prof. Cayetano Di Bartolo Andara

Ultima actualización: Julio de 2004



Julio de 2004

Física-3 (Problemas - Parte 1)
Prof. Cayetano Di Bartolo Andara
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar

Esta guía compuesta de dos partes contiene una serie de problemas adecuados para un curso de un trimestre de electrostática y magnetostática; al final de cada parte el lector encontrará las respuestas a los problemas propuestos. Muchos de los problemas aquí presentados han aparecido a lo largo de los años en los exámenes de Física-3 en la Universidad Simón Bolívar o son modificaciones de estos últimos. La guía se mantiene en construcción y si el lector tiene observaciones que hacer o desea contribuir a la misma, por favor, no dude en escribirme a mi dirección dibarto@usb.ve

AGRADECIMIENTOS

La guía se realiza con la inestimable colaboración de mi esposa Jacqueline Geille Sarthou, quien me ayuda en muchas etapas de su elaboración.

Instrucciones para las preguntas de selección

★ Cuando lo necesite use para la permitividad en el vacío el valor numérico

$$\epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

y para la constante eléctrica

$$k_e \equiv 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Contenido

1	Fuerza y campo eléctricos	4
2	Ley de Gauss	12
3	Potencial eléctrico y energía.	15
4	Condensadores.	21
5	Respuestas	23
5.1	Fuerza y campo eléctricos.	23
5.2	Ley de Gauss.	28
5.3	Potencial eléctrico y energía.	30
5.4	Condensadores.	34

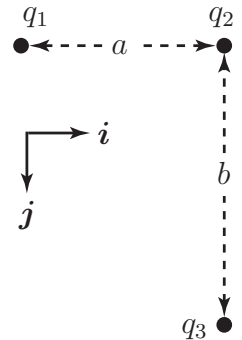
—Tema 1—

Fuerza y campo eléctricos

1. La figura muestra tres cargas que se mantienen fijas en el plano xy .

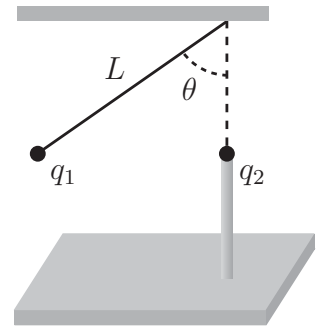
a. Halle, en cartesianas, la fuerza eléctrica neta sobre q_3 debida a las otras dos cargas.

b. Evalúe el resultado anterior para el caso $q_1 = 25 \text{ mC}$, $q_2 = -16 \text{ mC}$, $q_3 = 5 \text{ mC}$, $a = 3 \text{ m}$ y $b = 4 \text{ m}$.



2. El sistema de la figura se encuentra en reposo. Las dos partículas tienen la misma carga $q_1 = q_2 = q$ y se encuentran a la misma altura. La #1 tiene masa m y cuelga de un hilo tenso que forma un ángulo θ con la vertical. La carga #2 se mantiene fija en su lugar por medio de un soporte unido a una mesa.

Halle la longitud L del hilo.

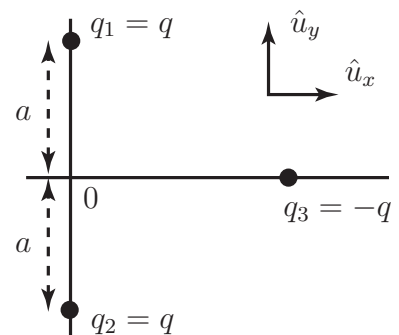


3. La figura muestra un sistema de tres partículas cargadas en un plano xy horizontal. Las partículas #1 y #2 se mantienen fijas y la #3, de masa m , se está moviendo a lo largo del eje x bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llame $x(t)$ a la posición de q_3 respecto al origen.

a. Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.

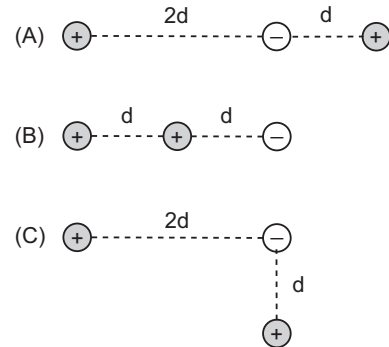
b. ¿Es el punto $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Por qué?

c. Halle el período del movimiento de q_3 si inicialmente se suelta desde el reposo en un punto $|x(0)| \ll a$.



4. Una carga puntual de $5 \mu\text{C}$ se coloca en el origen, otra carga puntual de $8 \mu\text{C}$ se coloca a 3 m del origen sobre el eje x , y una tercera carga de $12 \mu\text{C}$ se coloca a 3 m del origen sobre el eje y . Aproxime $K_e = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 * 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ y halle la magnitud de la fuerza sobre la carga en el origen.

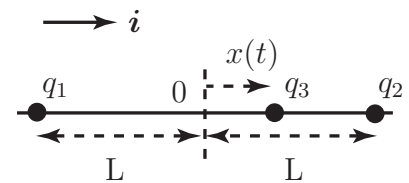
5. Un electrón y dos protones se colocan en los tres diferentes arreglos mostrados en la figura. Llamemos F al módulo de la fuerza eléctrica total que los protones ejercen sobre el electrón. Compare F en los tres casos y ordene de mayor a menor.



F en caso $>$ F en caso $>$ F en caso

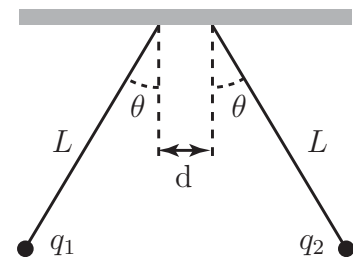
(Escriba en cada casilla la letra A, B o C adecuada)

6. En el sistema de la figura las tres partículas poseen la misma carga, $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Las partículas #1 y #2 se mantienen fijas y la #3, de masa m , se está moviendo a lo largo del eje x bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llamaremos $x(t)$ a la posición de q_3 respecto al origen 0.



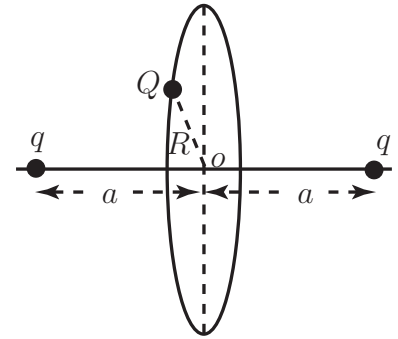
- Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.
- ¿Es el punto $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Por qué?
- Suponga que $|x(t)| \ll L$ y halle el período de las pequeñas oscilaciones de la partícula #3 en torno al origen.

7. Dos pequeños cuerpos con cargas q_1 y q_2 del mismo signo están en reposo suspendidos mediante hilos de longitud L . Los hilos, como se muestra en la figura, forman un ángulo θ con la vertical y sus puntos de sujeción al techo están separados una distancia d .



- Dibuje el diagrama de fuerzas de cada cuerpo.
- Escriba en componentes (vertical y horizontal) la segunda ley de Newton para cada carga.
- Determine las masas de los dos pequeños cuerpos.

8. Dos partículas, fijas y de carga q cada una se encuentran separadas una distancia $2a$. Una tercera partícula de masa M y carga Q está sometida solamente a la fuerza electrostática de las partículas fijas, ella gira en una órbita circular de radio R ; la órbita es perpendicular a la línea que une las dos partículas fijas y tiene su centro en el punto medio entre ellas. Ver figura.

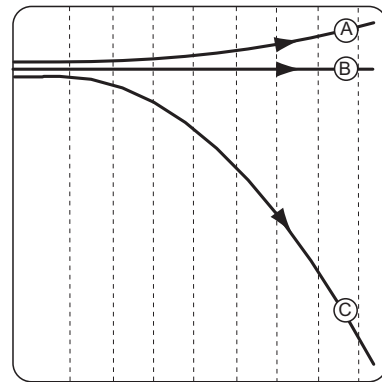


a. Calcule la fuerza electrostática sobre Q . Indique qué signo debe tener Q .

b. Halle la rapidez de Q .

c. Determine para qué valor de R es máximo el módulo de la fuerza sobre Q .

9. Un haz constituido por neutrones, electrones y protones, todos con igual velocidad, penetra en un campo vertical uniforme y se divide en otros tres haces A, B y C como indica la figura. Desprecie el efecto de la gravedad e indique a cuál tipo de partículas corresponde cada haz. Indique también qué se puede decir acerca del sentido del vector campo eléctrico.



Los neutrones forman el haz , los electrones el haz y los protones el haz .

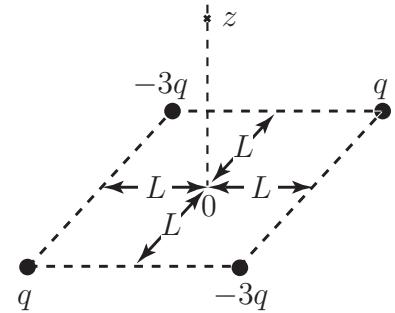
(Escriba en cada casilla la letra A, B o C adecuada)

El sentido del campo eléctrico es .

(Complete con el texto adecuado: hacia arriba, hacia abajo o indeterminable)

10. En los vértices de un cuadrado de lado $2L$ se fijan 4 partículas cuyas cargas se señalan en el dibujo.

a. Calcule el campo eléctrico del sistema en un punto z sobre el eje perpendicular al cuadrado y que pasa por su centro. Ayuda: Calcule por separado la contribución de cada par de cargas conectadas por una diagonal.

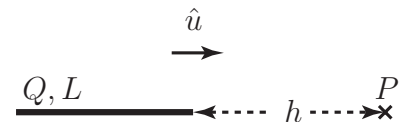


b. En el punto z se coloca una partícula de masa m y carga $2q$, inicialmente en reposo. Suponga que la gravedad no es relevante en este problema.

b1. Halle la ecuación de movimiento de la partícula de masa m .

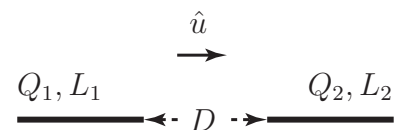
b2. Suponga que $z \ll L$ y calcule el período de las pequeñas oscilaciones que describe la partícula.

11. La figura a la derecha muestra una barra delgada de longitud L y carga Q uniformemente distribuida. El punto P está en la misma línea de la barra y a una distancia h del extremo de la misma.



a. Halle el campo eléctrico producido por la barra en el punto P y la fuerza eléctrica que le aplicaría a una carga puntual q que se colocara allí.

b. La figura a la derecha muestra dos barras delgadas, colineales, separadas una distancia D y de longitudes L_1 y L_2 . Sus cargas Q_1 y Q_2 están uniformemente distribuidas. Aproveche el resultado de la parte a y halle la fuerza eléctrica entre las dos barras.

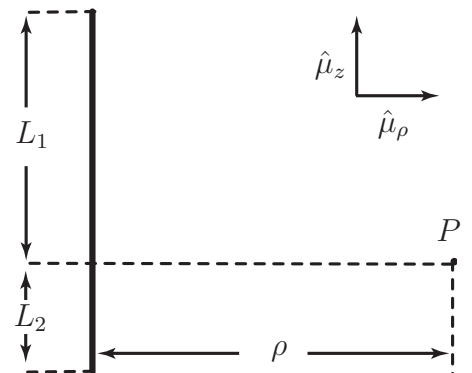


12. El hilo recto de la figura tiene longitud $L = L_1 + L_2$ y carga Q uniformemente distribuida.

a. Halle el campo eléctrico que produce el hilo en el punto P .

b1. Halle el valor del campo eléctrico para puntos P tales que $L_1 = L_2 = L/2$.

b2. Reescriba el resultado de b1 de forma tal que no aparezca Q y aparezca λ (la densidad longitudinal de carga del hilo).



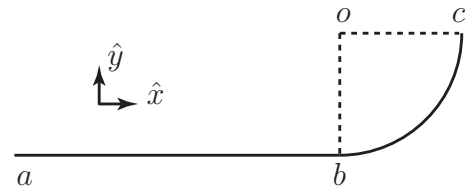
c. Para hallar el campo eléctrico producido por un hilo recto de longitud infinita tomemos el límite $L \rightarrow \infty$ en **b1** y en **b2**. Explique por qué son distintos los dos límites. ¿Cuál se debe tomar?

13. Un hilo circular de radio R y carga Q uniformemente distribuida está en el plano xy y su centro coincide con el origen.

a. Halle el campo eléctrico que produce en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$.

b. Estudie el comportamiento del campo encontrado en la parte **a** cuando $z \gg R$.

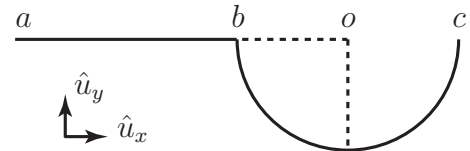
14. La figura muestra un hilo cargado \overline{abc} con densidad longitudinal de carga λ . El tramo \overline{bc} es un cuarto de una circunferencia de radio R y centro en o . El tramo \overline{ab} es recto, de longitud $L = 4R/3$ y perpendicular a la línea \overline{ob} .



a. Calcule el campo eléctrico que producen en el punto o cada uno de los dos tramos \overline{ab} y \overline{bc} .

b. Halle el campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto o .

15. La figura muestra un hilo cargado \overline{abc} con densidad longitudinal de carga λ . El tramo \overline{bc} es la mitad de una circunferencia de radio R y centro en o . El tramo \overline{ab} es recto, de longitud $L = 2R$ y paralelo a la línea \overline{bo} .



a. Calcule el campo eléctrico que producen en el punto o cada uno de los dos tramos \overline{ab} y \overline{bc} .

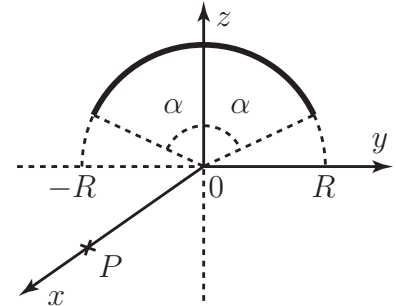
b. Halle la magnitud del campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto o y el ángulo que forma con la dirección \hat{u}_x .

16. Un hilo recto de longitud infinita y densidad longitudinal de carga $\lambda = 10^{-3}$ C/m coincide con el eje z . En el punto de coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = (3 \text{ m}, 4 \text{ m}, 7 \text{ m})$ se encuentra una partícula de carga $q = \frac{10^{-3}}{4}$ C. Halle las componentes cartesianas del vector fuerza electrostática que el hilo le aplica a la partícula. Aproxime $K = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

Ayuda: En el recuadro de la derecha aparece, en coordenadas cilíndricas, el campo eléctrico que produce un hilo infinito en un punto a una distancia ρ .

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

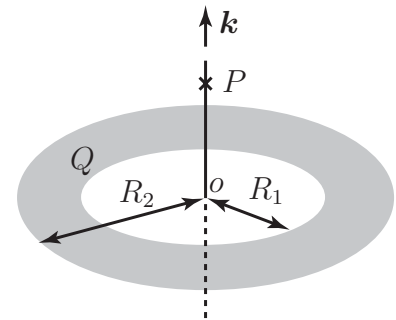
17. En la figura se muestra un hilo cargado con densidad longitudinal de carga λ constante. El hilo se encuentra en el plano yz y es un arco (de abertura 2α) de una circunferencia de radio R y centro en el origen. El punto P tiene coordenadas cartesianas $(x, 0, 0)$.



Determine el campo eléctrico que el hilo produce en el punto P .

18. El disco hueco de la figura se encuentra en el plano xy , su centro coincide con el origen o y su carga Q está uniformemente distribuida.

a. Calcule el campo eléctrico que el disco produce en el punto P de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$. Para hacerlo parta del campo eléctrico que produce un aro cargado sobre su eje perpendicular de simetría,

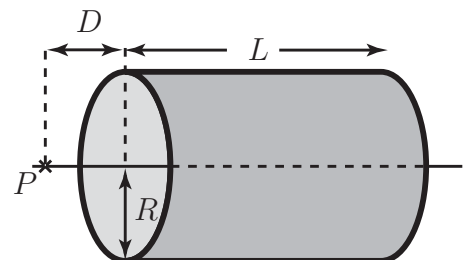


$$\mathbf{E} = \frac{q z \mathbf{k}}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ y use superposición.}$$

b. Verifique que para grandes distancias ($z \gg R_2$) el campo obtenido en **a** se aproxima al de una carga puntual. Nota: puede usar la aproximación $(1 + \epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon$, válida para $\epsilon \ll 1$.

c. A partir del resultado en la parte **a** determine el campo eléctrico que produce un plano infinito con densidad superficial de carga σ .

19. La figura a la derecha muestra un cascarón cilíndrico sin tapas, no conductor y de carga Q uniformemente distribuida en su superficie. Halle el campo eléctrico en el punto P que está sobre el eje central del cilindro a una distancia D de su extremo.



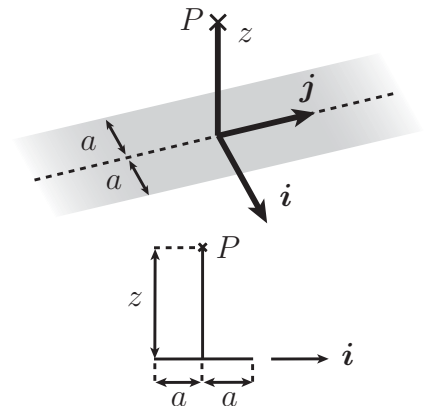
Ayuda: Puede partir del campo eléctrico que produce un hilo circular. Un hilo circular de radio R , en el plano xy , carga q uniformemente distribuida y centro en el origen produce en los puntos del eje z un campo dado por la expresión a la derecha.

$$\mathbf{E}(z) = \frac{z q \hat{u}_z}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

20. La figura abajo a la izquierda representa un semicirculo de radio r y carga q uniformemente distribuida. El campo eléctrico que produce en el punto o es $\mathbf{E} = q\hat{u}/(2\pi^2\epsilon_0 r^2)$. Aprovechando este resultado calcule el campo que la semiarandela de la figura abajo a la derecha produce en el punto o . La semiarandela tiene carga Q distribuida uniformemente en su superficie.



21. La figura muestra una cinta plana de longitud infinita, ancho $2a$ y densidad superficial constante σ . El punto P se encuentra en un eje perpendicular a la cinta y que pasa por el eje central de la misma, la distancia de P a la cinta es z .



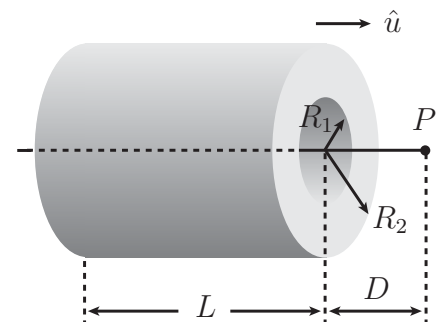
a. Calcule el campo eléctrico en el punto P .

b. Estudie el comportamiento del campo para $z \ll a$ (z pequeño). Use que cuando $s \rightarrow \infty$ entonces $\text{arctg}(s) \rightarrow \pi/2$.

c. Estudie el comportamiento del campo para $z \gg a$ (z grande). Use que cuando $s \ll 1$ entonces $\text{arctg}(s) \approx s$.

22. El cilindro de la figura tiene un agujero cilíndrico coaxial de radio R_1 , su longitud es L y su carga Q se encuentra uniformemente distribuida en su volumen. El punto P se encuentra sobre el eje del cilindro a una distancia D del extremo del cilindro.

Halle el campo eléctrico que el cilindro produce en el punto P .



Ayuda: Parta de la expresión para el campo eléctrico que una arandela (disco hueco) de carga

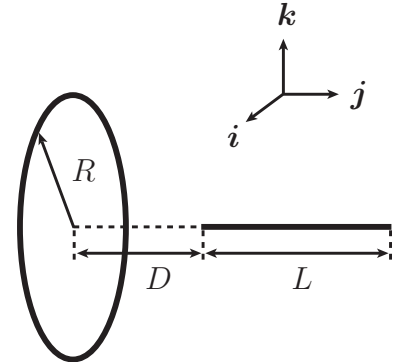
q uniformemente distribuida produce en un punto a una distancia z sobre su eje central,

$$\mathbf{E} = \frac{qz \mathbf{k}}{2\pi\epsilon_0(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right).$$

R_2 y R_1 son los radios externo e interno respectivamente.

23. Los hilos recto y circular de la figura tienen cargas uniformemente distribuidas. El hilo circular tiene carga Q_1 , radio R , se encuentra en el plano xz y su centro coincide con el origen de coordenadas. El hilo recto posee carga Q_2 , longitud L , se encuentra sobre el eje y y dista del origen una distancia D .

Halle el vector fuerza eléctrica sobre el hilo recto que le aplica el hilo circular.



Ayuda: Puede partir del hecho de que $\mathbf{E} = \frac{Q_1 y \mathbf{j}}{4\pi\epsilon_0(R^2 + y^2)^{3/2}}$ es el campo eléctrico producido por el hilo circular en un punto de coordenadas cartesianas $(0, y, 0)$.

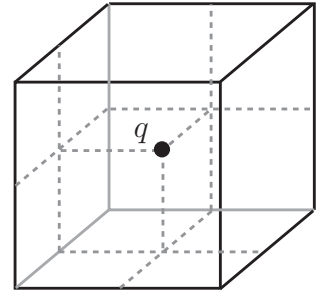
—Tema 2—

Ley de Gauss

1. La carga mostrada en la figura se encuentra en el centro de un cubo mayor de arista $2L$ y en un vértice de un cubo menor de arista L . Llamaremos \mathbf{E} al campo eléctrico producido por esta carga.

a. Utilizando argumentos de simetría determine el flujo de \mathbf{E} a través de cada cara del cubo mayor.

b. Ahora determine el flujo eléctrico que atraviesa cada cara del cubo menor.



2. Una esfera de 2 cm de radio y con centro en el origen tiene carga de $8 \mu\text{C}$ uniformemente distribuida en su volumen. Halle el campo eléctrico que produce en los puntos con coordenadas cartesianas $P_1 = (1, 0, -1)$ cm y $P_2 = (0, 2, 2)$ cm.

3. Un cilindro no conductor, de longitud infinita y radio R tiene carga distribuida uniformemente en su interior, siendo λ su densidad longitudinal de carga.

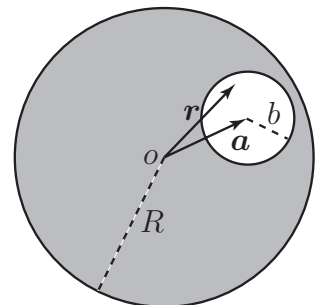
a. Calcule la densidad volumétrica de carga D del cilindro.

b. Usando la ley de Gauss halle el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

4. La figura muestra una esfera cargada de radio R y centro o con un hueco esférico en su interior de radio b . El centro del agujero tiene vector posición \mathbf{a} respecto al punto o . La densidad volumétrica de carga de la esfera es constante y vale D para todos los puntos en el interior de la misma salvo en el agujero.

Halle el campo eléctrico que se produce en un punto que se encuentre en el agujero y posea vector posición \mathbf{r} (simplifique la expresión obtenida).

Ayuda: Use superposición y el hecho de que una esfera maciza, homogénea, de radio R ,



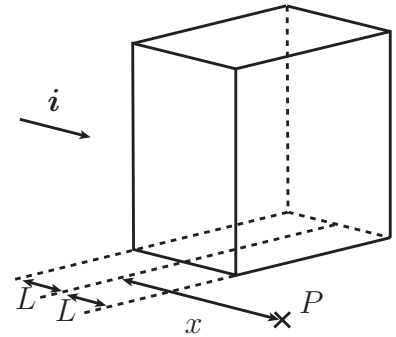
carga Q y centro en el origen produce en cualquier punto de su interior, con vector posición \mathbf{r} , un campo eléctrico dado por $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{r}/(4\pi\epsilon_0 R^3)$.

5. Una esfera maciza de radio R y centro en el origen tiene una distribución radial de carga cuya densidad volumétrica es $D(r) = ar$, donde a es una constante conocida y r es la distancia al centro de la esfera.

a. Diga qué dimensiones posee la constante a en el sistema S.I. Calcule la carga encerrada por una esfera de radio $r \leq R$ y centro en el origen.

b. Usando la ley de Gauss halle el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

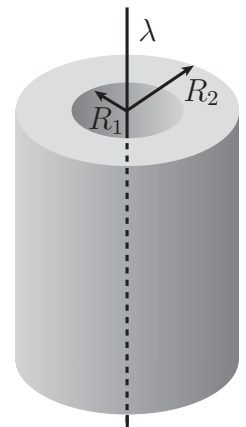
6. La figura muestra un corte de una distribución de carga de alto y largo infinitos y espesor $2L$. La carga está uniformemente distribuida con densidad volumétrica de carga D . Tomaremos el eje \mathbf{i} perpendicular a la distribución de cargas y el origen de coordenadas en el centro de la misma.



a. Utilizando la ley de Gauss halle el campo eléctrico para un punto P en el exterior ($|x| \geq L$).

b. Encuentre el campo eléctrico para puntos en el interior de la distribución de carga ($|x| \leq L$).

7. El cascarón cilíndrico de la figura tiene longitud infinita, radio interno $R_1 = R$, radio externo $R_2 = 3R$ y una densidad volumétrica de carga dada por $D(\rho) = -\lambda/(\pi R\rho)$, para $R_1 < \rho < R_2$, donde ρ es la distancia al eje del cascarón. Este eje se encuentra ocupado por un hilo recto infinito con densidad longitudinal de carga λ constante.



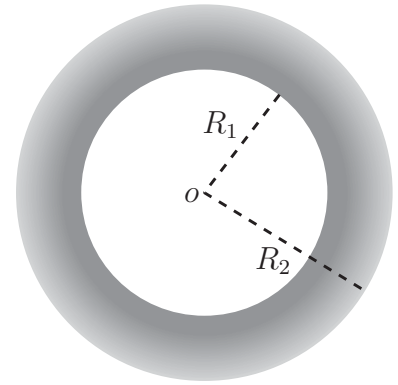
a. Halle la carga encerrada por un cilindro coaxial al hilo, de radio ρ (con $R_1 < \rho < R_2$) y longitud H . Nota: no se olvide del hilo cargado.

b. Encuentre el campo eléctrico en la región $R_1 < \rho < R_2$.

8. La figura es un corte de una corona esférica de radio interno R_1 , radio externo R_2 y centro en el origen o . La corona tiene carga neta Q distribuida radialmente con una densidad volumétrica de carga dada por $D(\mathbf{r}) = A/r$ si $R_1 \leq r \leq R_2$, donde A es una constante desconocida.

a. Halle la constante A y la carga encerrada por una esfera centrada en o y de radio r con $R_1 \leq r \leq R_2$.

b. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.



—Tema 3—

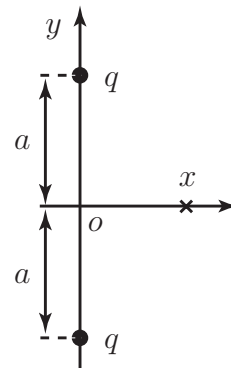
Potencial eléctrico y energía.

1. La figura muestra dos partículas, de carga q positiva cada una, fijas sobre el eje y y separadas una distancia a del origen.

a. Halle el potencial eléctrico que el sistema de las dos cargas produce en un punto de posición $(x, 0)$.

b. Otra partícula de masa m y carga Q positiva se coloca sobre el eje x a una distancia b del origen. Diga qué rapidez mínima debe imprimírsele para que alcance el origen.

c. Evalúe numéricamente el resultado de la parte **b** para el caso en que se tenga $q = 10 \mu\text{C}$, $Q = 150 \mu\text{C}$, $m = 0,2 \text{ Kg}$, $a = 3 \text{ m}$ y $b = 4 \text{ m}$.

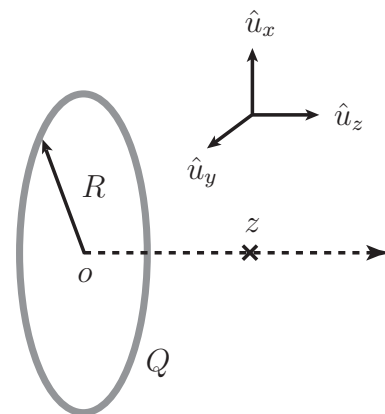


2. El aro de la figura tiene radio R y carga positiva Q uniformemente distribuida, se encuentra fijo al plano xy y su centro coincide con el origen de coordenadas.

a. A partir del potencial eléctrico de una carga puntual determine el potencial del aro en un punto de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$.

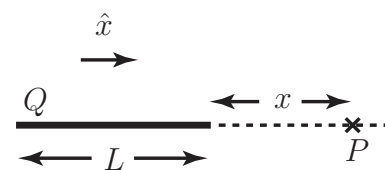
b. Una partícula de carga q positiva y masa m se coloca en reposo en el punto de coordenadas $(0, 0, H)$. Encuentre la rapidez máxima que alcanza la partícula.

c. Evalúe numéricamente el resultado de la parte **b** para el caso en que se tenga $q = 1 \mu\text{C}$, $Q = 8 \mu\text{C}$, $m = 20 \text{ g}$, $R = 3 \text{ m}$ y $H = 4 \text{ m}$.



3. La figura muestra un hilo uniforme de carga positiva Q y longitud L fijado sobre el eje x .

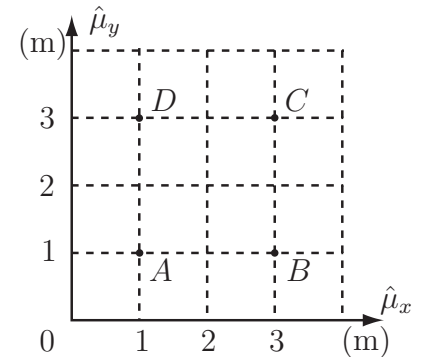
a. A partir del potencial eléctrico de una carga puntual determine el potencial del hilo en el punto P . Tome potencial cero en infinito.



b. Use el resultado anterior y argumentos de simetría para hallar el campo eléctrico del hilo en el punto P .

c. Una partícula de masa m y carga $-Q$ se lanza hacia el hilo con una rapidez v_0 desde un punto situado sobre el eje x y a una distancia $5L$ del extremo derecho del hilo. Halle la rapidez de la partícula cuando ésta se encuentre a una distancia $2L$ del hilo.

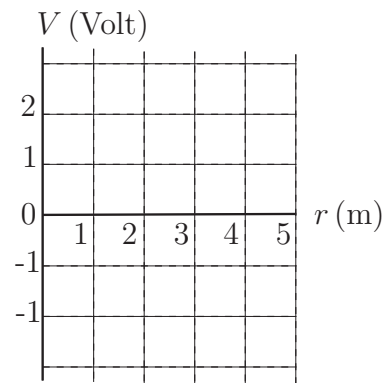
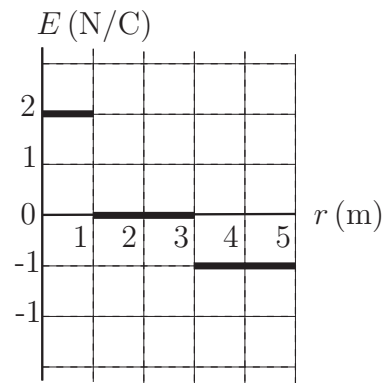
4. La figura muestra 4 puntos (A , B , C y D) sobre el plano xy . En la región existe un campo eléctrico uniforme dado por $\mathbf{E} = 2(\hat{u}_x + \hat{u}_y)$ N/C. Dibuje las superficies (líneas) equipotenciales y ordene, de mayor a menor, el valor del potencial en los puntos A , B , C y D .



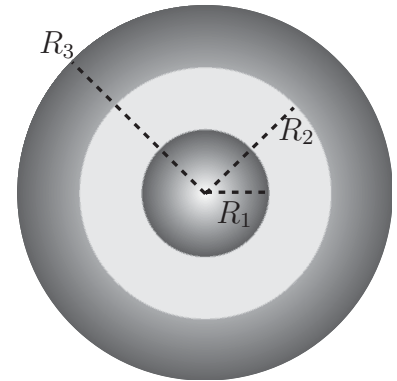
5. En cierta región existe un campo eléctrico cuya expresión (en coordenadas esféricas) es $\mathbf{E} = E(r)\hat{u}_r$ con la función $E(r)$ como se muestra en la gráfica abajo a la izquierda. Las tres regiones ($0 < r < 1$ m), ($1 \text{ m} < r < 3$ m) y ($3 \text{ m} < r < 5$ m) pueden tener densidades volumétricas de carga y las discontinuidades del campo indican densidades superficiales de carga en las superficies esféricas $r = 1$ m y $r = 3$ m.

a. Halle la densidad superficial de carga en la superficie esférica $r = 1$ m. Aproxime $\epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$.

b. Halle el potencial $V(r)$ tomando nivel cero de potencial en el origen. Grafique $V(r)$ en el cuadrículado proporcionado abajo a la derecha.



6. Se tienen dos conductores esféricos y concéntricos; uno es un cascarón de radio interno $R_2 = 2R$ y radio externo $R_3 = 3R$ y el otro es una esfera maciza de radio $R_1 = R$, ver figura. La región entre los dos conductores está ocupada por una sustancia aislante con densidad volumétrica de carga constante D . La carga Q_1 del conductor de radio R_1 es desconocida. Suponga que la diferencia de potencial entre los dos conductores es $V_a = V(R_2) - V(R_1)$.



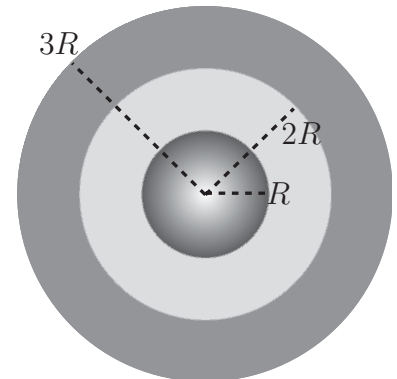
a. Halle el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ para $R_1 < |\mathbf{r}| < R_2$, exprese su resultado en función de cantidades conocidas y de Q_1 . Halle también la carga Q del aislante.

b. Calcule Q_1 . Ayuda: recuerde que conoce la diferencia de potencial entre los conductores.

c. Determine la carga del cascarón conductor en su "cara" interna (superficie $r = R_2$).

d. A continuación se conectan los dos conductores por medio de un alambre conductor y se espera a que se restablezca el equilibrio. Determine la nueva distribución de cargas en las superficies de los conductores. Ayuda: aproveche el resultado de las partes **b** y **c**.

7. La esfera ($r < R$) y la corona ($2R < r < 3R$), sombreadas en oscuro en el dibujo, son conductoras. La zona ($R < r < 2R$) está ocupada por un material no conductor de densidad constante y desconocida. Suponga que en la zona ($R < r < 2R$) el campo eléctrico es:



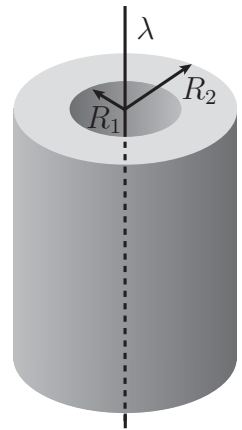
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4R^2}{r^2} + \frac{r}{R} \right) E_1 \hat{u}_r \quad \text{si } R < r < 2R,$$

donde E_1 es una constante conocida.

A) Halle el potencial $V(r)$ en la región ($R < r < 2R$) tomando nivel cero sobre el conductor de radio R .

B) Halle las densidades superficiales de carga de los conductores en las dos superficies esféricas $r = R$ y $r = 2R$. Halle también la densidad volumétrica de carga, D , del material no conductor.

8. La figura muestra un hilo y un conductor cilíndrico coaxiales y de longitud infinita. El conductor cilíndrico tiene radio interno R_1 , radio externo R_2 y carga neta nula. El hilo posee una densidad longitudinal de carga λ constante.

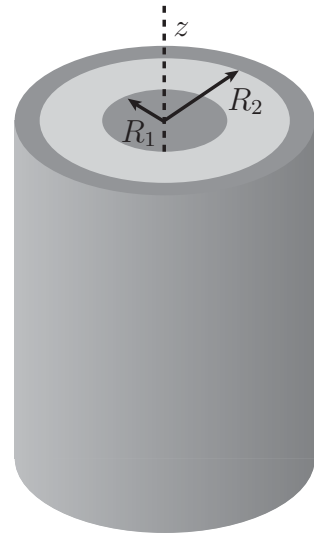


- Halle las densidades longitudinales y superficiales de carga en las dos superficies del conductor.
- Encuentre el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- Tome el conductor a potencial cero y determine el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio.

9. La figura muestra en gris oscuro dos conductores, uno de radio externo R_1 y el otro de radio interno R_2 . La región entre ellos está ocupada completamente por un material no conductor de densidad volumétrica de carga constante y desconocida D . Se sabe que en la región entre los conductores el potencial eléctrico es

$$V(\rho) = -\frac{A}{\epsilon_0}(\rho^2 - R_1^2) \quad \text{si} \quad R_1 \leq \rho \leq R_2,$$

donde ρ es la distancia al eje central (eje z) y A es una constante conocida.



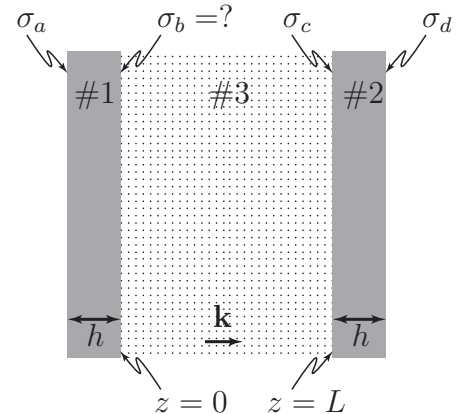
- Determine el vector campo eléctrico en la región $R_1 < \rho < R_2$.
- Tome una Gaussiana S que sea un cilindro cuyo eje coincida con el eje z , de altura H y radio $\rho = R$ con $R_1 < R < R_2$. Halle el flujo del campo eléctrico a través de esta Gaussiana (exprese su resultado en términos de cantidades conocidas).
- Halle la densidad superficial de carga del conductor interno (superficie $\rho = R_1$) y la densidad volumétrica de carga D .

10. La figura muestra tres regiones numeradas. Las regiones #1 y #2 están ocupadas por conductores de espesor h , largo y anchos infinitos. La región #3 está ocupada por un material no conductor de espesor L , ancho y largo infinitos y densidad de carga volumétrica constante y desconocida D . Se sabe que en la región #3 el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{\epsilon_0}(A + Bz)\mathbf{k} \quad \text{si } 0 < z < L.$$

donde A y B son constantes conocidas.

- Determine el potencial $V(z)$ en la región #3. Tome potencial cero en $z = 0$.
- Tome una Gaussiana S que sea un cilindro paralelo al eje z y de radio R , con una tapa en la región #1 y la otra tapa en el plano $z = H$ con $0 < H < L$. Halle el flujo del campo eléctrico a través de esta Gaussiana (expresé su resultado en términos de cantidades conocidas).
- Las 4 densidades superficiales de carga σ_a , σ_b , σ_c y σ_d en las superficies de los conductores son desconocidas. Halle σ_b y la densidad volumétrica D .

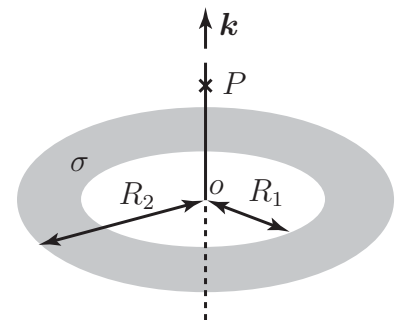


11. El disco hueco de la figura se encuentra en el plano XY , su centro coincide con el origen o y posee una densidad superficial de carga σ constante y positiva.

- Calcule el potencial eléctrico del disco en un punto arbitrario P de coordenadas cartesianas $(0, 0, z)$. Para hacerlo parta del potencial eléctrico que produce un aro de radio r y carga q sobre su eje perpendicular de simetría,

$$V(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{1/2}}, \text{ y use superposición.}$$

- Una partícula de carga negativa $-q$ se suelta del reposo, sobre el eje z y a una distancia H del origen. Determine la energía cinética que posee cuando pasa por el origen. Suponga que el disco está fijo y la gravedad es despreciable.



12. Sea una esfera de radio R , centro en el origen y carga Q uniformemente distribuida en su volumen. El campo eléctrico que produce la esfera viene dada por la expresión a la derecha.

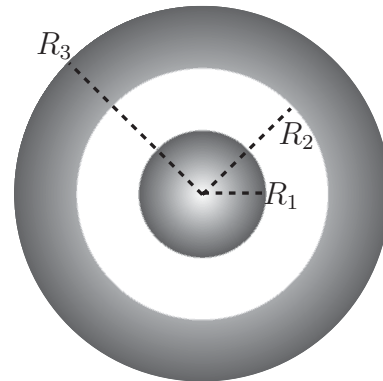
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{k_e Q \mathbf{r}}{R^3} & \text{si } r \leq R, \\ \frac{k_e Q \mathbf{r}}{r^3} & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

Halle la energía almacenada en el campo eléctrico de la esfera (el trabajo realizado por un agente externo para formar la esfera trayendo cada elemento de carga puntual desde infinito).

—Tema 4—

Condensadores.

1. La figura muestra un condensador formado por dos conductores esféricos y concéntricos; uno es un cascarón de radio interno R_2 y radio externo R_3 y el otro es una esfera maciza de radio R_1 , ver figura. La carga del conductor de radio R_1 es $Q_1 = Q$, mientras que el cascarón posee carga neta nula.

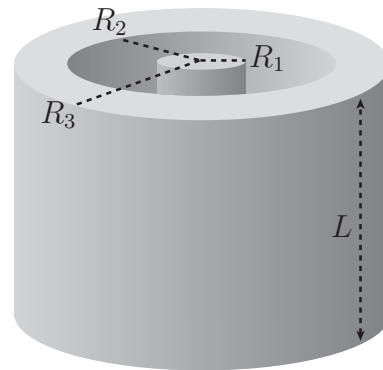


a. Determine la carga de la superficie interna ($r = R_2$) y de la superficie externa ($r = R_3$) del cascarón.

b. Halle la diferencia de potencial entre los dos conductores y luego determine la capacidad del condensador.

c. Suponga que Q es positiva y que una pequeña carga negativa q ($|q| \ll Q$) se desprende de la superficie $r = R_2$ partiendo del reposo. Determine su energía cinética al chocar con la esfera.

2. La figura muestra un condensador formado por dos conductores cilíndricos coaxiales de longitud L ; uno es un cascarón de radio interno R_2 y radio externo R_3 y el otro es macizo de radio R_1 , ver figura. La carga del conductor de radio R_1 es $Q_1 = Q$, mientras que el cascarón posee carga neta nula. Supondremos que $L \gg R_3$ (el dibujo no está a escala) de tal forma que podemos hacer la aproximación de que el campo eléctrico posee la simetría radial usual para cilindros infinitos.

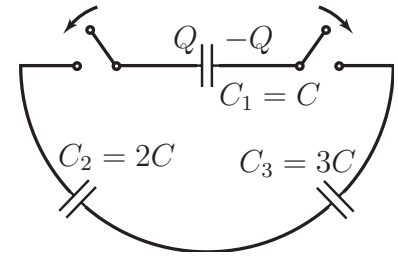


a. Halle la carga de la superficie interna ($\rho = R_2$) y de la superficie externa ($\rho = R_3$) del cascarón.

b. Determine el campo eléctrico y el potencial en la región $R_1 < \rho < R_2$, donde ρ es la distancia al eje común de los dos cilindros. Tome potencial cero en el conductor de radio R_1 .

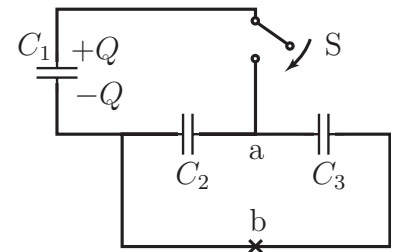
c. Encuentre la capacidad por unidad de longitud del condensador.

3. La figura muestra un circuito con tres condensadores y dos interruptores unidos por hilos conductores. El condensador C_1 tiene carga Q y los otros dos están descargados. En cierto momento se cierran los interruptores y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.



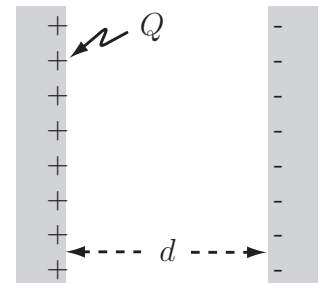
- Encuentre la carga que se almacena en cada placa de cada condensador.
- Halle la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador.

4. El condensador C_1 de la figura está cargado como se muestra y los otros dos condensadores están descargados. Se cierra el interruptor S y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.



- Determine las cargas en las placas de los tres condensadores que están conectadas al punto a.
- Halle la diferencia de potencial $V_a - V_b$.

5. La figura muestra un condensador aislado, de placas paralelas separadas una distancia d y con carga Q . Llamaremos C , V y U respectivamente a su capacidad, diferencia de potencial entre sus placas y energía almacenada. Suponga que las placas se separan hasta una distancia $5d$ sin alterar la carga de las mismas.



- Encuentre los nuevos valores de la capacidad, diferencia de potencial y energía almacenada en función de los iniciales.
- Halle el trabajo realizado por un agente externo al separar las placas.

—Respuestas 5—

5.1 Fuerza y campo eléctricos.

1.

a.
$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{q_1 a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{q_1 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{q_2}{b^2} \right] \mathbf{j} \right\}$$

b.

$$\mathbf{F}_3 = 9(3\mathbf{i} - \mathbf{j})10^3 \text{ N}$$

2.

$$L = \sqrt{\frac{q^2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 m g \sin^3\theta}}$$

3.

a.
$$\mathbf{F}_3 = -\frac{q^2 x \hat{u}_x}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad \ddot{x} + \frac{q^2 x}{2\pi\epsilon_0 m (a^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

b.

Es un punto de equilibrio porque $\mathbf{F}_3(x)|_{x=0} = 0$.

c.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m a^3}{q^2}}.$$

4.

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) (q_1 q_2 + q_1 q_3)} = 10^4 \text{ N}$$

5. F en caso B $>$ F en caso C $>$ F en caso A

6.

a.
$$\mathbf{F}_3 = \frac{q^2 \mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(L+x)^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right], \quad \ddot{x} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left[\frac{1}{(L-x)^2} - \frac{1}{(L+x)^2} \right] = 0.$$

b. Es un punto de equilibrio porque $\mathbf{F}_3(x)|_{x=0} = 0$.

c.
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 m L^3}{q^2}}.$$

7.

b.
$$T_1 \cos\theta = m_1 g, \quad T_1 \sin\theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 (d + 2L \sin\theta)^2}$$

para el #2 se cambia $T_1 \rightarrow T_2$ y $m_1 \rightarrow m_2$.

c.
$$m_1 = m_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 g \operatorname{tg}\theta (d + 2L \sin\theta)^2}.$$

8. Tomaremos el vector unitario \mathbf{u}_R como aquél que apunta del centro o de la circunferencia hacia Q .

a.
$$\mathbf{F} = \frac{qQ R \mathbf{u}_R}{2\pi \epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \operatorname{Signo}(Q) = -\operatorname{Signo}(q).$$

b.
$$v = \sqrt{\frac{|qQ| R^2}{2\pi \epsilon_0 M (R^2 + a^2)^{3/2}}}.$$

c.
$$R = a/\sqrt{2}.$$

9. Los neutrones forman el haz , los electrones el haz y los protones el haz .

El sentido del campo eléctrico es

10. Tomaremos el vector unitario \mathbf{k} paralelo al eje z y apuntando hacia arriba.

a.
$$\mathbf{E} = -\frac{q z \mathbf{k}}{\pi \epsilon_0 (z^2 + 2L^2)^{3/2}}.$$

b1.
$$\ddot{z} + \frac{2q^2 z}{\pi \epsilon_0 m (z^2 + 2L^2)^{3/2}}.$$

b2.
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\pi \sqrt{2} \epsilon_0 m L^3}{q^2}}.$$

11.

a.
$$\mathbf{E} = \frac{Q \hat{u}}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} \right), \quad \mathbf{F} = \frac{qQ \hat{u}}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L} \right).$$

b. [Fuerza sobre Q_2] =
$$\mathbf{F}_{2,1} = \frac{Q_1 Q_2 \hat{u}}{4\pi\epsilon_0 L_1 L_2} \ln \left[\frac{(D+L_1)(D+L_2)}{D(D+L_1+L_2)} \right].$$

12.

a.
$$\mathbf{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \rho L} \right) \left[\left(\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + \rho^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + \rho^2}} \right) \hat{u}_\rho + \left(\frac{\rho}{\sqrt{L_1^2 + \rho^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{L_2^2 + \rho^2}} \right) \hat{u}_z \right]$$

b1.
$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{Q \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}} \right)$$

b2.
$$\mathbf{E}_2 = \left(\frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} \right) \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}}$$

c.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{E}_1 = 0 \quad (\text{corresponde a una carga } Q \text{ finita diluida en un hilo infinito})$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (\text{corresponde a un hilo infinito con densidad de carga finita})$$

13.

a.
$$\mathbf{E} = \frac{Q z \hat{u}_z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

b.
$$\mathbf{E} \approx \frac{Q \hat{u}_z}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad (\text{desde lejos se ve como una carga puntual}).$$

14.

a.
$$\mathbf{E}_{ab} = \frac{\lambda}{10\pi\epsilon_0 R} (\hat{x} + 2\hat{y}), \quad \mathbf{E}_{bc} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{x} + \hat{y}).$$

b.
$$\mathbf{E}_{abc} = \frac{3\lambda}{20\pi\epsilon_0 R}(-\hat{x} + 3\hat{y}).$$

15.

a.
$$\mathbf{E}_{ab} = \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_x, \quad \mathbf{E}_{bc} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_y.$$

b.
$$|\mathbf{E}_{abc}| = \frac{|\lambda|\sqrt{10}}{6\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{ángulo} = \arctg(3).$$

16. El campo eléctrico que produce el hilo en el punto $\mathbf{r} = z\hat{u}_z + \rho\hat{u}_\rho$ es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda\hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = K\frac{2\lambda\hat{u}_\rho}{\rho} \approx (18 * 10^6 \text{ Nm/C})\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}.$$

El vector posición de la partícula es $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\hat{u}_z = (3 \text{ m}, 4 \text{ m}, 7 \text{ m})$ con $\boldsymbol{\rho} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y = (3\hat{u}_x + 4\hat{u}_y)$ m y $\rho = |\boldsymbol{\rho}| = 5 \text{ m}$. En consecuencia la fuerza sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{10^{-3}}{4}\right) (18 * 10^6) \frac{1}{25} (3\hat{u}_x + 4\hat{u}_y) \text{ N} = 180(3\hat{u}_x + 4\hat{u}_y) \text{ N}.$$

17.
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} [2\alpha x \mathbf{i} - 2R \text{sen}(\alpha) \mathbf{k}].$$

18.

a.
$$\mathbf{E} = \frac{Qz\mathbf{k}}{2\pi\epsilon_0(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right).$$

c.
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \text{signo}(z) \frac{\sigma \mathbf{k}}{2\epsilon_0} \quad (\text{para un plano que coincida con el plano } xy).$$

19. Vector \hat{u} apunta hacia la izquierda.

$$\mathbf{E} = \frac{Q\hat{u}}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (D+L)^2}} \right)$$

20.
$$\mathbf{E} = \frac{Q\hat{u}}{\pi^2\epsilon_0(R_2^2 - R_1^2)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

21.

a.
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{z}\right) \mathbf{k}.$$

b.
$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}, \quad (\text{es el campo de un plano infinito}).$$

c.
$$\mathbf{E} \approx \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0 z} \mathbf{k} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \mathbf{k},$$

(campo de un hilo infinito con densidad longitudinal $\lambda = 2a\sigma$).

22.

$$\mathbf{E} = \frac{Q \hat{u}}{2\pi\epsilon_0 L (R_2^2 - R_1^2)} \times \left(\sqrt{R_1^2 + (D+L)^2} - \sqrt{R_1^2 + D^2} - \sqrt{R_2^2 + (D+L)^2} + \sqrt{R_2^2 + D^2} \right).$$

23.

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{j}}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{\sqrt{D^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(D+L)^2 + R^2}} \right)$$

5.2 Ley de Gauss.

1.

a. A través de cada cara atraviesa el mismo flujo dado por $\phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$.

b. En las tres caras en contacto con la carga el flujo es nulo y en cada una de las otras tres el flujo es $\phi = \frac{q}{24\epsilon_0}$.

2. $\mathbf{E}_{P_1} = 9 \times 10^7 (\hat{u}_x - \hat{u}_z) \text{ N/C}, \quad \mathbf{E}_{P_2} = \frac{9 \times 10^7}{\sqrt{2}} (\hat{u}_y + \hat{u}_z) \text{ N/C}.$

3.

a. $D = \lambda / (\pi R^2).$

b. Tomaremos el eje z coincidiendo con el eje del cilindro y llamaremos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\hat{u}_\rho = (x\hat{i} + y\hat{j})/\rho$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\lambda \rho}{2\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_\rho & \text{si } \rho < R, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{u}_\rho & \text{si } R \leq \rho. \end{cases}$$

4. El campo eléctrico es constante en el agujero y vale $\mathbf{E} = \frac{D \mathbf{a}}{3\epsilon_0}$.

5.

a. $[a] = \text{C/m}^4, \quad q(r) = \pi a r^4.$

b. Llamaremos $\hat{u}_r = \mathbf{r}/r$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{ar^2}{4\epsilon_0} \hat{u}_r & \text{si } r < R, \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

6. Definimos $\sigma = 2LD$ para obtener una expresión más reconocible.

a.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{DL}{\epsilon_0} \mathbf{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} & \text{si } x \geq L, \\ -\frac{DL}{\epsilon_0} \mathbf{i} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} & \text{si } x \leq -L. \end{cases}$$

b.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Dx}{\epsilon_0} \mathbf{i}, \quad \text{si } -L \leq x \leq L.$$

7. Tomaremos el eje z coincidiendo con el hilo y usaremos coordenadas cilíndricas: ρ es la distancia al eje z y \hat{u}_ρ es el vector “radial” de coordenadas polares perpendicular al eje z .

a.

$$Q(\rho) = \lambda H (3 - 2\rho/R).$$

b.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{\rho} - \frac{2}{R} \right) \hat{u}_\rho, \quad \text{si } R < \rho < 3R.$$

8.

a.

$$A = \frac{Q}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad q(r) = Q \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right).$$

b. Definimos $\hat{r} = \mathbf{r}/r$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \hat{r} & \text{si } R_1 \leq r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } R_2 \leq r. \end{cases}$$

5.3 Potencial eléctrico y energía.

1.

a.
$$V(x) = \frac{2k_e q}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

b.
$$v = \sqrt{\frac{4k_e q Q}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}.$$

c.
$$v = 6 \text{ (m/s)}.$$

2.

a.
$$V(0, 0, z) = \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

b. La rapidez máxima se alcanza en infinito y su valor es
$$v = \sqrt{\frac{2k_e Q q}{m\sqrt{R^2 + H^2}}}.$$

c.
$$v = 1, 2 \text{ (m/s)}.$$

3.

a.
$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{x+L}{x} \right).$$

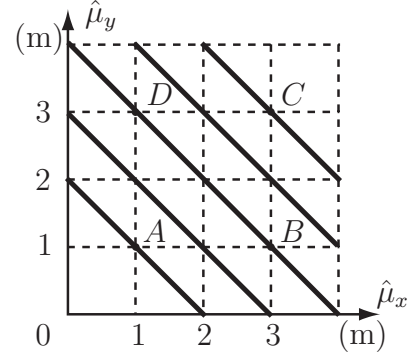
b.
$$\mathbf{E}(x) = \frac{Q\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L} \right) = \frac{Q\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 x(x+L)}.$$

c.
$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L m} \ln \left(\frac{5}{4} \right)}.$$

4.

$$V(x, y) = -2(x + y) \text{ Volt/m}$$

$$V_A > V_D = V_B > V_C$$



5.

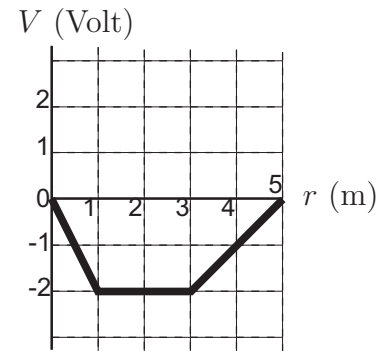
a. Llamaremos $R = 1 \text{ m}$.

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_{r=R^-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (2\text{N/C})4\pi R^2 \rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0(2\text{N m}^2/\text{C}) \quad (\text{Carga en } r < 1 \text{ m})$$

$$0 = \oint_{r=R^+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + \sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \rightarrow \begin{cases} \sigma = -2\epsilon_0 \text{ N/C} = -18 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2 \\ (\text{Densidad en } r = 1 \text{ m}) \end{cases}$$

b.

$$V(r) = \begin{cases} -2r \text{ Volt/m} & \text{si } r \leq 1 \text{ m,} \\ -2 \text{ Volt} & \text{si } 1 \text{ m} \leq r \leq 3 \text{ m} \\ +r \text{ Volt/m} - 5 \text{ Volt} & \text{si } 3 \text{ m} \leq r \leq 5 \text{ m.} \end{cases}$$



6.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{r^2} + \frac{4\pi D}{3}(r - R^3/r^2) \right], \quad Q = \frac{28\pi}{3} R^3 D.$$

$$\text{b.} \quad Q_1 = -8\pi\epsilon_0 R V_a - 8\pi R^3 D/3.$$

$$\text{c.} \quad Q_{2,\text{interna}} = 8\pi\epsilon_0 R V_a - 20\pi R^3 D/3.$$

$$\text{d.} \quad Q'_1 = -8\pi R^3 D/3, \quad Q'_{2,\text{interna}} = -20\pi R^3 D/3, \quad Q'_{2,\text{externa}} = \text{no cambia.}$$

7.

$$V(r) = \left(\frac{4R^2}{r} - \frac{r^2}{2R} - \frac{7R}{2} \right) E_1 \quad \text{Si } R \leq r \leq 2R$$

$$\mathbf{E}(R) = 5E_1 \hat{u}_r = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \hat{u}_r \Rightarrow \sigma_1 = 5\epsilon_0 E_1 \quad (\text{superficie } r = R)$$

$$\mathbf{E}(2R) = 3E_1 \hat{u}_r = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \hat{u}_r \Rightarrow \sigma_2 = -3\epsilon_0 E_1 \quad (\text{superficie } r = 2R)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 \left(\frac{4R^2}{r^2} + \frac{r}{R} \right) E_1 = \frac{\sigma_1 4\pi R^2}{\epsilon_0} + \frac{D 4\pi (r^3 - R^3)}{3\epsilon_0} \Rightarrow D = \frac{3\epsilon_0 E_1}{R}$$

8. Tomaremos el eje z coincidiendo con el hilo y usaremos coordenadas cilíndricas, ρ es la distancia al eje z .

a. $\lambda_{R_1} = -\lambda, \quad \sigma_{R_1} = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}, \quad \lambda_{R_2} = \lambda, \quad \sigma_{R_2} = \frac{\lambda}{2\pi R_1}.$

b.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi \epsilon_0 \rho} & \text{si } \rho \in (0, R_1) \cup (R_2, \infty), \\ 0 & \text{si } \rho \in (R_1, R_2). \end{cases}$$

c.

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{R_1} \right) & \text{si } \rho \in (0, R_1], \\ 0 & \text{si } \rho \in [R_1, R_2], \\ -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{R_2} \right) & \text{si } \rho \in [R_2, \infty). \end{cases}$$

9.

a. $\mathbf{E} = \frac{2A\rho}{\epsilon_0} \hat{u}_\rho.$

b. $\Phi = \frac{4\pi}{\epsilon_0} A R^2 H.$

c. $\sigma_{R_1} = 2AR_1, \quad D = 4A.$

10.

a.
$$V(z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(A z + \frac{B z^2}{2} \right) .$$

b.
$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} (A + B H) \pi R^2 .$$

c.
$$\sigma_b = A, \quad D = B .$$

11.

a)
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right) .$$

b)
$$T = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left(R_2 - R_1 - \sqrt{R_2^2 + H^2} + \sqrt{R_1^2 + H^2} \right) .$$

12.
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R^3} |\mathbf{E}|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} (k_e Q)^2 4\pi \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \right] = \frac{3k_e Q^2}{5R} .$$

5.4 Condensadores.

1.

a.
$$Q_{2,\text{interna}} = -Q \quad Q_{2,\text{externa}} = Q.$$

b.
$$V_{R_1} - V_{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}, \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}.$$

c.
$$E_{\text{cinética}} = \frac{|q| Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}.$$

2. Tomaremos el eje z coincidiendo con los ejes de los dos cilindros y usaremos coordenadas cilíndricas, ρ es la distancia a dicho eje.

a.
$$Q_{R_2} = -Q, \quad Q_{R_3} = Q.$$

b.
$$\mathbf{E} = \frac{Q \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0 L \rho}, \quad V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{\rho}{R_1}\right).$$

c.
$$C/L = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}.$$

3. Llamaremos q_1 , q_2 y q_3 a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores C_1 , C_2 y C_3 respectivamente.

a.
$$q_1 = 5Q/11, \quad q_2 = q_3 = 6Q/11.$$

b.
$$V_1 = \frac{5Q}{11C}, \quad V_2 = \frac{3Q}{11C}, \quad V_3 = \frac{2Q}{11C}.$$

4.

a.
$$q_1 = \frac{C_1 Q}{C_1 + C_2 + C_3} \quad q_2 = \frac{C_2 Q}{C_1 + C_2 + C_3} \quad q_3 = \frac{C_3 Q}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

b.
$$V_a - V_b = \frac{Q}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

5. La capacidad de un condensador de placas paralelas de superficie S y separadas una distancia d es $C = \epsilon_0 S/d$.

a)
$$C' = C/5, \quad V' = 5V, \quad U' = 5U.$$

b)
$$W = U' - U = 4U.$$
